Problemas para el Lunes dia 23 y el Martes día 24 de Noviembre de 2009.

1. A las 4 de la tarde un coche pasa, a una velocidad de 70 Km/h por el punto kilométrico 400 de la autovía Madrid-Barcelona. Diez minutos más tarde pasa, a 80 Km/h, por el punto 425 de la citada autovía. Le paran en un control de tráfico y le multan por haber circulado en un determinado instante a 150 Km/h. Indique razonadamente si puede recurrir la multa con garantías de éxito.

2. Alonso y Massa parten en sus Ferrari del mismo lugar y al mismo tiempo y llegan a la meta empatados. Demostrar que durante la carrera llevaron, al menos en un determinado instante t, la misma velocidad. (¡Ojo! la velocidad media es la misma, pero no se pregunta eso.)

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - [\ln(1+x^2)] \operatorname{arctg} x}{x^5}$ (Sol: $\dfrac{5}{6}$)

4. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln(1-x)\operatorname{arctg} x + 2x^2 + x^3}{x^3} & \text{si } x \in [-1, 0) \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\operatorname{arcsen} x - shx}{\sqrt{1-x^2} - \cos x} & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$$
   (a) Determínese el valor de a para que sea continua. (Hasta 6 puntos.)
   (b) Estudiese la derivabilidad en $(-1, 1)$. (Hasta 4 puntos.)

5. El polinomio de orden 3 de $f(x)$ en $a = 1$ es $2 - 5x + 7x^2 - 2x^3$. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$. (Ayuda: Obtenga los datos del polinomio.)

6. Las funciones f y g son indefinidamente derivables en $x = 0$. La fórmula de Mc Laurin de f es $f(x) = x^3 - 2x^4 + R_5$ y la de g es $-x + x^2 + R_4$. Hallar la fórmula de Mc Laurin de fg (producto de las funciones) de orden 5. (Ayuda: Multiplique adecuadamente los polinomios u obtenga los valores de las derivadas a partir de los polinomios.)

7. Escribir el polinomio $p(x) = 3 + 2x + 7x^2 - 15x^3$ en potencias de $x + 1$. (Ayuda: Desarrolle en $a = -1$.)

8. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{80}$ mediante un polinomio de Taylor de orden 2. (Debe elegirse razonadamente el punto a en el que se desarrolla).

9. Idem $\operatorname{tg} 0'1$ y $\operatorname{tg} \dfrac{0'9\pi}{4}$, con polinomios de orden 3.

10. Demostrar que $\operatorname{arctg} x \le x, \;\; x \in [0, +\infty)$.

11. Demostrar que $1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x$.

12. Determinar el número de raíces reales de $x \ln x = 1$ en $(0, +\infty)$.

13. Determinar el número de raíces reales de $\cos x + x \operatorname{sen} x - x^3 = 0$.

14. Hallar el valor aproximado de las raíces reales de $x^5 + x - 3 = 0$.

Se harán en clase todos excepto los números 3, 4, 7 *y* 9. *Desde el número* 5 *no se ha hecho ninguno en clase. Por eso los primeros llevan una ayuda.*

Los desarrollos de Mc Laurin de las funciones más habituales son:

- $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5$.
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + R_6$.
- $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + R_5$.
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + R_5$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + R_6$.
- $\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + R_5$.
- $\operatorname{argtgh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + R_5$.